

Physik VI - Übungsblatt 3

Alex Ilin, Kristina Klafka und Janosh Riebesell

06. Mai 2014

Präsenzaufgaben

1 Zeitabhängige Störungstheorie

Diskutieren sie anhand der folgenden Aufgabe die Prinzipien der zeitabhängigen Störungstheorie. Es soll ein System mit Hamiltonoperator \hat{H}_0 mit diskreten Eigenwerten E_n und Eigenvektoren $|\phi_n\rangle$, d.h. $\hat{H}_0|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, betrachtet werden, das ab dem Zeitpunkt $t = 0$ durch eine zeitabhängige Störung $\lambda\hat{W}(t)$ mit $\lambda \ll 1$ verändert wird. Für Zeiten $t > 0$ entwickelt sich das System also gemäß der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = [\hat{H}_0 + \lambda\hat{W}(t)]|\Psi(t)\rangle, \quad (1)$$

wobei hier die Anfangsbedingung $|\Psi(t=0)\rangle = |\phi_i\rangle$ angenommen werden soll.

Die Übergangswahrscheinlichkeit in einen Zustand $|\phi_f\rangle$ ist dann gegeben durch $P_{if}(t) = |\langle\phi_f|\Psi(t)\rangle|^2$.

- a) Zeigen sie, dass in der Basis $\{|\phi_n\rangle\}$, in der $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\phi_n\rangle$ und $W_{nk}(t) = \langle\phi_n|\hat{W}(t)|\phi_k\rangle$ ist, die folgende Gleichung gilt

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = E_n c_n(t) + \lambda \sum_k W_{nk}(t) c_k(t) \quad (2)$$

Der Ausdruck(2) ergibt sich direkt aus der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung durch Multiplikation von links mit dem Bra-Vektor $\langle\phi_n|$, wenn man berücksichtigt, dass die Koeffizienten $c_n(t)$ des Eigenzustands in der Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ gegeben sind durch $\langle\phi_n|\Psi(t)\rangle$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle\phi_n|\Psi(t)\rangle &= \langle\phi_n|\hat{H}_0|\Psi(t)\rangle + \lambda \langle\phi_n|\hat{W}(t)|\Psi(t)\rangle \\ &= \langle\hat{H}_0\phi_n|\Psi(t)\rangle + \lambda \sum_k \langle\phi_n|\hat{W}(t)|\phi_k\rangle \langle\phi_k|\Psi(t)\rangle \\ &= E_n c_n(t) + \lambda \sum_k W_{nk}(t) c_k(t) \end{aligned} \quad (3)$$

- b) Zeigen sie weiter, dass mithilfe der Ersetzung $c_n(t) = b_n(t)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$ und mit $\omega_{nk} = \frac{E_n - E_k}{\hbar}$ folgt

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_n(t) = \lambda \sum_k e^{i\omega_{nk}t} W_{nk}(t) b_k(t) \quad (4)$$

Für die linke Seite von Gleichung (3) ergibt sich

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left(b_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \right) = i\hbar \dot{b}_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} + E_n b_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \quad (5)$$

und für die rechte dementsprechend

$$E_n b_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} + \lambda \sum_k W_{nk}(t) b_k(t) e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t}. \quad (6)$$

Abziehen gleicher Terme und Multiplikation mit $e^{i\frac{E_n}{\hbar}t}$ liefert das gewünschte Ergebnis

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} b_n(t) &= \lambda \sum_k W_{nk}(t) b_k(t) e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t} e^{i\frac{E_n}{\hbar}t} \\ &= \lambda \sum_k W_{nk}(t) b_k(t) e^{i\omega_{nk}t} \end{aligned} \quad (7)$$

- c) Expandieren sie die Funktionen $b_n(t)$ in eine Potenzreihe in λ , d.h. $b_n(t) = b_{n,0}(t) + \lambda b_{n,1}(t) + \lambda^2 b_{n,2}(t) + \dots$ mit Koeffizientenfunktionen $b_{n,j}(t)$ und finden sie eine Rekursionsformel für die $b_{n,j}(t)$.

Setzt man die Reihenentwicklung $b_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j b_{n,j}(t)$ in Gleichung (7) ein, entsteht

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j b_{n,j}(t) = \lambda \sum_k W_{nk}(t) e^{i\omega_{nk}t} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j b_{k,j}(t) \quad (8)$$

Diese Gleichung liefert einige Erkenntnisse durch einen Koeffizientenvergleich in λ :

λ^0 : Ein Term ohne λ findet sich in Gleichung (8) nur auf der linken Seite. Daraus folgt zwangsläufig

$$\frac{d}{dt} b_{n,0}(t) = 0. \quad (9)$$

$b_{n,0}$ ist also zeitunabhängig.

λ^j : Alle Terme mit höherer Potenz in λ haben dieselbe Struktur einer Rekursionformel:

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_{n,j}(t) = \sum_k W_{nk}(t) e^{i\omega_{nk}t} b_{k,j-1}(t) \quad (10)$$

Hierbei wurde in Gleichung (8) das λ vor der Summe über k mit in die Summe über j gezogen und anschließend der Summationsindex um 1 erhöht.

Mit Gleichung (10) ist es also möglich aus $b_{n,0}$ iterativ alle weiteren Entwicklungskoeffizienten $b_{n,j}$ durch Integration über die Zeit zu berechnen. $b_{n,0}$ ist durch die Anfangsbedingung eines Systems eindeutig bestimmt.

- d) Bestimmen sie den Zustand des Systems zur Zeit t in erster Ordnung und geben sie die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{if}(t)$ (Fermis goldene Regel) an. Für den Anfangszustand $|\Psi(t=0)\rangle = |\phi_i\rangle$ zeige man für die Koeffizienten $b_{n,0}(t=0) = \delta_{ni}$ und $b_{n,j>0}(t=0) = 0$.

Da die zeitabhängige Störung erst ab $t = 0$ auf das System wirkt, ist das System vor diesem Zeitpunkt ungestört und somit $b_n(t=0) = b_{n,0}(t=0)$ sowie $b_{n,j}(t=0) = 0 \forall j > 0$. $b_{n,0}(t=0)$ lässt sich damit aus der Anfangsbedingung $|\Psi(t=0)\rangle = \phi_i$ explizit berechnen:

$$\begin{aligned} b_{n,0}(t=0) &= c_n(t=0) e^{i\frac{E_n}{\hbar} \cdot 0} = \langle\phi_n|\Psi(t=0)\rangle \\ &= \langle\phi_n|\phi_i\rangle = \delta_{ni} \end{aligned} \quad (11)$$

In Aufgabenteil **c)** wurde gezeigt, dass $b_{n,0}$ zeitunabhängig ist, sodass diese Gleichung auch für spätere Zeiten gilt. Aus der Rekursionsformel (10) folgt für $b_{n,1}(t)$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_{n,1}(t) = \sum_k W_{nk}(t) e^{i\omega_{nk}t} b_{k,0}(t) = W_{ni}(t) e^{i\omega_{ni}t} \quad (12)$$

Zeitliche Integration dieses Ausdrucks ergibt

$$b_{n,1}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t W_{ni}(t') e^{i\omega_{ni}t'} dt' \quad (13)$$

Der Zustand des gestörten Systems zur Zeit t ist also nach zeitabhängiger Störungsrechnung bis zur ersten Ordnung in der Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_n c_n(t) |\phi_n\rangle = \sum_n b_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\phi_n\rangle \\ &\approx \sum_n [b_{n,0} + \lambda b_{n,1}(t)] e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\phi_n\rangle \\ &= e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t} |\phi_i\rangle + \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_n \left(\int_0^t W_{ni}(t') e^{i\omega_{ni}t'} dt' \right) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\phi_n\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

Dieser Ausdruck ist nicht normiert. Nun soll noch die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{if}(t)$ berechnet werden, wobei von $i \neq f$ ausgegangen wird, da sonst kein Übergang stattfand. Es gilt deshalb $\langle \phi_i | \phi_f \rangle = 0$, da die $\{|\phi_n\rangle\}$ als Eigenzustände eines Hamilton-Operators orthogonal sind.

$$\begin{aligned} P_{if}(t) &= |\langle \phi_f | \Psi(t) \rangle|^2 = \left| \langle \phi_f | e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t} |\phi_i\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_n \left(\int_0^t W_{ni}(t') e^{i\omega_{ni}t'} dt' \right) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \langle \phi_f | \phi_n \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{\lambda}{i\hbar} \int_0^t W_{fi}(t') e^{i\omega_{fi}t'} dt' e^{-i\frac{E_f}{\hbar}t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t \langle \phi_f | \lambda \hat{W}(t) | \phi_i \rangle e^{i\omega_{fi}t'} dt' \right|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Übungsaufgaben

Zeeman- und Paschen-Back-Effekt im Grundzustand von Positronium und Myonium

Betrachtet wird die Aufspaltung des Grundzustandes von Positronium und Myonium unter Berücksichtigung der Hyperfeinwechselwirkung und der Wechselwirkung des Systems mit einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)^T$. Diese exotischen Atome setzen sich wie folgt zusammen:

- Das Positronium besteht aus einem Elektron e^- und einem Positron e^+ (Ladung $q = +e$, Masse $m_{e^+} = m_e$, Spin $s = \frac{1}{2}$).
- Das Myonium besteht aus einem Elektron und einem Antimyon μ^+ (Ladung $q = +e$, Masse $m_{\mu^+} \approx 207m_e$, Spin $s = \frac{1}{2}$).

Der Elektronenspin werde mit $\hat{\mathbf{S}}_1$, der des Positrons bzw. Antimyons mit $\hat{\mathbf{S}}_2$ bezeichnet. Das magnetische Moment des Elektrons ist dann durch $\boldsymbol{\mu}_e = \gamma_1 \hat{\mathbf{S}}_1$, das des Positrons und Antimyons durch $\boldsymbol{\mu}_{e^+/\mu^+} = \gamma_2 \hat{\mathbf{S}}_2$ gegeben. Hierbei

bezeichnet γ_i das gyromagnetische Verhältnis des jeweiligen Teilchens, welches sich wie folgt zusammensetzt aus dessen Landé-Faktor g_i und seinem Magneton μ_i :

$$\gamma_i = g_i \frac{\mu_i}{\hbar} \quad \text{mit } \mu_i = \frac{q_i \hbar}{2m_i} \quad (16)$$

Für das Elektron gilt somit

$$\gamma_1 = g_e \frac{-e}{2m_{e^-}} = g_e \frac{-\mu_B}{\hbar} \quad (17)$$

und für Positron bzw. Antimyon

$$\gamma_2 = g_{e^+/\mu^+} \frac{e}{2m_{e^+/\mu^+}} = g_{e^+/\mu^+} \frac{m_{e^-}}{m_{e^+/\mu^+}} \frac{\mu_B}{\hbar} \quad (18)$$

mit $g_{e^-} \approx -2$ und $g_{e^+/\mu^+} \approx 2$. Da sich sowohl Landé-Faktoren als auch die Magnetone von Elektron und Positron im Vorzeichen unterscheiden, haben beide Teilchen das gleiche gyromagnetische Verhältnis.

1 Zeemann-Effekt

(12 Punkte)

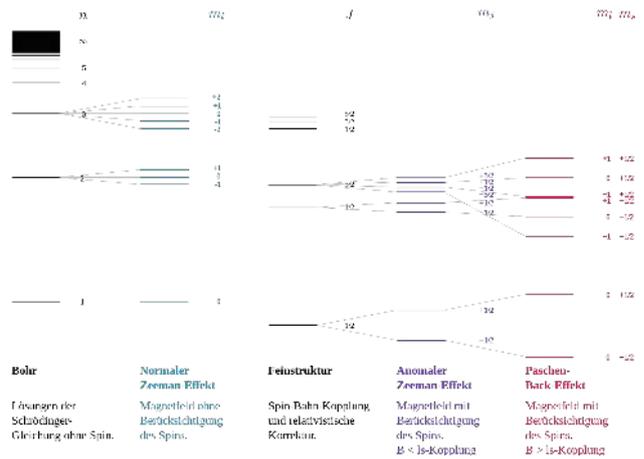


Abbildung 1: Aufspaltungen der Wasserstoffniveaus unter Einfluss eines Magnetfeldes. [Wikipedia - Zeeman-Effekt]

Zunächst soll die Struktur des Grundzustandes unter Einfluß der Hyperfeinwechselwirkung $\hat{V}_{HFS} = A \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ und eines schwachen Magnetfeldes $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)^T$ betrachtet werden. Schwach bedeutet in diesem Fall, dass die Wechselwirkungsenergie der magnetischen Momente von Elektron und Positron/Antimyon mit dem äußeren Magnetfeld klein ist gegenüber der Hyperfeinwechselwirkungsenergie.

- a) Es sei $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$ der Gesamtspin des Systems. Vernachlässigen sie zunächst den Einfluss des äußeren Magnetfeldes und geben sie einen Ausdruck für den Energieabstand zwischen den Hyperfeinstrukturkomponenten des Grundzustands $1s_{1/2}$ an. Skizzieren sie die Hyperfeinstrukturaufspaltung. (4 Punkte)

Für die Berechnung der Energieaufspaltung bedient man sich einer der wichtigsten Methoden der quantenmechanischen Drehimpulsalgebra:

$$\hat{\mathbf{F}}^2 = \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\hat{\mathbf{S}}_1 \hat{\mathbf{S}}_2 \Rightarrow \hat{\mathbf{S}}_1 \hat{\mathbf{S}}_2 = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}^2 - \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \hat{\mathbf{S}}_2^2) \quad (19)$$

Daraus ergibt sich für die Wechselwirkungsenergie

$$\hat{V}_{\text{HFS}} = A \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 = \frac{A}{2} (\hat{\mathbf{F}}^2 - \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \hat{\mathbf{S}}_2^2) \quad (20)$$

Für dieses System bietet sich der Satz $\hat{\mathbf{F}}^2, \hat{\mathbf{S}}_1^2, \hat{\mathbf{S}}_2^2, \hat{F}_z$ kommutierender Observablen mit gemeinsamen Eigenzuständen $|F, m_F\rangle$ an. Gleichung (20) angewendet auf solch einen gemeinsamen Eigenzustand lautet

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{HFS}}|F, m_F\rangle &= \frac{A}{2} (\hat{\mathbf{F}}^2 - \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \hat{\mathbf{S}}_2^2)|F, m_F\rangle \\ &= \frac{A\hbar^2}{2} \left(F(F+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1) \right) |F, m_F\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

Die Gesamtspinquantenzahl F eines Zweiteilchensystems bestehend aus den Spins $\hat{\mathbf{S}}_1$ und $\hat{\mathbf{S}}_2$ kann ganzzahlige Werte aus der Menge $\{|S_1 - S_2|, \dots, S_1 + S_2\}$ annehmen. In diesem Fall sind die Einstellungen $F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ und $F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ möglich. Der Energieabstand benachbarter Hyperfeinstrukturkomponenten beträgt

$$\begin{aligned} \Delta E_{F+1, F} &= \langle F+1, m_F | \hat{V}_{\text{HFS}} | F+1, m_F \rangle \\ &\quad - \langle F, m_F | \hat{V}_{\text{HFS}} | F, m_F \rangle \\ &= \frac{A\hbar^2}{2} \left((F+1)(F+2) - F(F+1) \right) \\ &= \frac{A\hbar^2}{2} (F+1)(F+2-F) = \underline{\underline{A\hbar^2(F+1)}} \end{aligned} \quad (22)$$

Die Energiedifferenz benachbarter Hyperfeinstrukturkomponenten hängt also linear von der Gesamtspinquantenzahl ab, wobei F hier stets auf den unteren der beiden betrachteten Zustände bezogen ist. Für Positronium und Myonium ist demnach $F = 0$, sodass man eine Energiedifferenz der Hyperfeinstrukturkomponenten von $\Delta E_{1,0} = A\hbar^2$ erwarten würde.

Dieses Ergebnis deckt sich mit den tatsächlichen Energiekorrekturen beider Systeme

$$\hat{V}_{\text{HFS}}|0, 0\rangle = \frac{A\hbar^2}{2} \left(0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) |0, 0\rangle = -\frac{3A\hbar^2}{4} |0, 0\rangle \quad (23)$$

$$\hat{V}_{\text{HFS}}|1, m_F\rangle = \frac{A\hbar^2}{2} \left(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) |1, m_F\rangle = \frac{A\hbar^2}{4} |1, m_F\rangle, \quad (24)$$

wobei in Gleichung (24) m_F die Einstellungen $\{-1, 0, 1\}$ haben kann. Der $F = 1$ Zustand ist also dreifach entartet. Die Korrektur wirkt auf den Zustand $F = 0$ allerdings auch dreimal stärker, sodass die Aufspaltung in Abbildung 2 insgesamt die Summenregel erfüllt, d.h. der $1s_{1/2}$ -Linienschwerpunkt bleibt unverändert.

- b) Nun wird das schwache Magnetfeld als kleine Störung hinzugenommen. Da das Magnetfeld schwach ist, kann die Wechselwirkungsenergie des Systems mit dem äußeren Magnetfeld durch ein effektives magnetisches Moment

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{eff}} = \frac{(\boldsymbol{\mu}_e + \boldsymbol{\mu}_{e^+/\mu^+}) \hat{\mathbf{F}}}{|\hat{\mathbf{F}}|} \cdot \frac{\hat{\mathbf{F}}}{|\hat{\mathbf{F}}|} \quad (25)$$

beschrieben werden: $\hat{V}_{\text{mag}} = -\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{B}$ Diese Energie soll als Störung der Hyperfeinstruktur betrachtet werden. Zeigen sie,

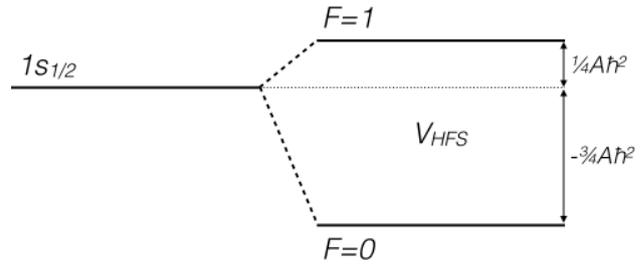


Abbildung 2: Hyperfeinstrukturaufspaltung durch Wechselwirkung der Spins in Positronium bzw. Myonium

dass die Aufspaltung der Hyperfeinstrukturkomponenten in ihre Zeeman-Niveaus durch

$$\Delta E_{\text{Zee}}(F, m_F) = \frac{\hbar}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) m_F B_0 \quad (26)$$

gegeben ist. Skizzieren sie die Zeeman-Aufspaltung der Hyperfeinstruktur des Grundzustands beider Systeme. (6 Punkte)

Der allgemeine Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie \hat{V}_{mag} mit dem Magnetfeld kann für ein Feld nur in z -Richtung $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)^T$ spezialisiert werden

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{mag}} &= -\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{B} = -\frac{(\boldsymbol{\mu}_e + \boldsymbol{\mu}_{e^+/\mu^+}) \hat{\mathbf{F}}}{|\hat{\mathbf{F}}^2|} \hat{F}_z B_0 \\ &= -(-\gamma_1 \hat{\mathbf{S}}_1 - \gamma_2 \hat{\mathbf{S}}_2) (\hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2) \frac{\hat{F}_z B_0}{|\hat{\mathbf{F}}^2|} \\ &= (\gamma_1 \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \gamma_1 \hat{\mathbf{S}}_1 \hat{\mathbf{S}}_2 + \gamma_2 \hat{\mathbf{S}}_2 \hat{\mathbf{S}}_1 + \gamma_2 \hat{\mathbf{S}}_2^2) \frac{\hat{F}_z B_0}{|\hat{\mathbf{F}}^2|} \\ &= (\gamma_1 \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \frac{\gamma_1}{2} (\hat{\mathbf{F}}^2 - \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \hat{\mathbf{S}}_2^2) \\ &\quad + \frac{\gamma_2}{2} (\hat{\mathbf{F}}^2 - \hat{\mathbf{S}}_2^2 - \hat{\mathbf{S}}_1^2) + \gamma_2 \hat{\mathbf{S}}_2^2) \frac{\hat{F}_z B_0}{|\hat{\mathbf{F}}^2|} \\ &\stackrel{1}{=} \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \hat{\mathbf{F}}^2 \frac{\hat{F}_z B_0}{|\hat{\mathbf{F}}^2|} = \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \hat{F}_z B_0 \end{aligned} \quad (27)$$

Die Aufspaltung der Hyperfeinstrukturkomponenten in ihre Zeeman-Niveaus erhält man nun durch Bildung des Erwartungswert des Wechselwirkungsoperator

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{Zee}}(F, m_F) &= \langle F, m_F | \hat{V}_{\text{mag}} | F, m_F \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) B_0 \langle F, m_F | \hat{F}_z | F, m_F \rangle = \frac{\hbar}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) m_F B_0 \end{aligned} \quad (28)$$

Das gyromagnetische Verhältnis $\gamma = g \frac{\mu}{\hbar} = g \frac{q}{2m}$ setzt sich zusammen aus dem Landé-Faktor g , der Ladung q und der Masse m eines Teilchens. Da sich sowohl Ladung als auch Landé-Faktor von Elektron und Positron im Vorzeichen unterscheiden, ist ihr gyromagnetisches Verhältnis $\gamma_{e^-} = \gamma_{e^+}$ identisch. Die Zeeman-Aufspaltung beträgt somit

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{Zee,Pos}}(m_F) &= \frac{\hbar}{2} (\gamma_{e^-} + \gamma_{e^+}) m_F B_0 = \hbar \gamma_{e^-} m_F B_0 \\ &= \hbar g \frac{\mu_B}{\hbar} m_F B_0 \approx 2\mu_B m_F B_0 \end{aligned} \quad (29)$$

¹In diesem Schritt wurde bereits ausgenutzt, dass $\hat{\mathbf{S}}_1^2$ und $\hat{\mathbf{S}}_2^2$ angewandt auf Eigenzustände $|F, m_F\rangle$ denselben Wert liefern, um Papier zu sparen.

Für das Myonium gilt wegen $m_e \ll m_{\mu^+}$ näherungsweise

$$\Delta E_{Zee, Myo} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{g_s \mu_B}{\hbar} - \frac{m_e}{m_{\mu^+}} \frac{g_{\mu^+} \mu_B}{\hbar} \right) m_F B_0 \quad (30)$$

$$\approx \frac{\hbar}{2} \frac{g_s \mu_B}{\hbar} m_F B_0 \approx \mu_B m_F B_0.$$

Der Zeeman-Effekt führt also stets zu einer $2F + 1$ -fachen Aufspaltung jedes Hyperfeinstrukturniveaus. Der Grad der Aufspaltung hängt nur vom Magnetfeld und von der Magnetquantenzahl ab, was die Namensgebung letzterer erklärt. Abbildung 3 zeigt die Zeeman-Aufspaltung der verschiedenen Hyperfeinstrukturkomponenten von Myonium.

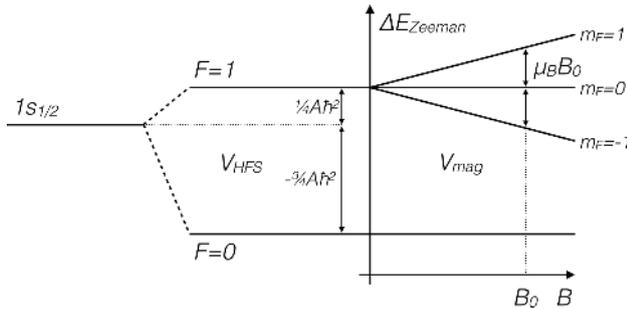


Abbildung 3: Zeemanaufspaltung im Myonium. Der einzige Unterschied beim Positronium ist eine Aufspaltungsenergie von $2\mu_B B_0$ statt $\mu_B B_0$.

- c) Schätzen sie für Myonium einen Magnetfeldbereich ab, in dem das Magnetfeld als schwach bezeichnet werden kann. Verwenden sie hierzu das Kriterium, dass der Energieabstand zwischen zwei Zeeman-Komponenten des Myoniums um den Faktor 10 kleiner sein soll als der Energieabstand zwischen zwei Hyperfeinstrukturkomponenten des Grundzustands von Myonium (für Myonium gilt $\Delta E_{HFS} = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ h/s} = 2,95 \cdot 10^{-24} \text{ J}$. (2 Punkte)

Das Kriterium wird hier auf die Zeeman-Komponenten des $F = 1$ Zustands angewandt, da $F = 0$ nicht aufspaltet. Der Abstand zwischen den Hyperfeinstrukturkomponenten des Grundzustands von Myonium beträgt laut Aufgabenstellung $\Delta E_{HFS} = 2,95 \cdot 10^{-24} \text{ J}$ und soll um den Faktor 10 größer sein, als der Abstand zwischen den Zeeman-Komponenten. Setzt man diese Bedingung in die Näherung aus Gleichung (30) ein, erhält man folgende magnetische Flussdichte

$$\Delta E_{HFS} = 2,95 \cdot 10^{-24} \text{ J} \stackrel{!}{>} 10 \Delta E_{Zeeman} \quad (31)$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{\Delta E_{Zeeman}}{\mu_B} < \underline{\underline{0,032 \text{ T}}}$$

2 Paschen-Back-Effekt (8 Punkte)

Wird ein genügend starkes Magnetfeld angelegt, so ist die Hyperfeinwechselwirkungsenergie $\hat{V}_{HFS} = A \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ wesentlich kleiner als die Wechselwirkungsenergie der magnetischen Momente von Elektron und Positron bzw. Antimyon mit dem äußeren Magnetfeld $\hat{V}_{mag} = -(\boldsymbol{\mu}_e + \boldsymbol{\mu}_{e^+/\mu^+}) \cdot \mathbf{B}$. Dieses Magnetfeldregime bezeichnet man als Paschen-Back-Regime.

- a) Vernachlässigen sie zunächst die Hyperfeinwechselwirkung gegenüber der Wechselwirkung des Systems mit dem

äußeren Magnetfeld. Geben sie einen Ausdruck für die Aufspaltung des Grundzustands $1s_{1/2}$ unter dem Einfluß von \hat{V}_{mag} an. Berechnen sie also

$$\Delta E_B = \langle m_{S_1}, m_{S_2} | \hat{V}_{mag} | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle. \quad (32)$$

Skizzieren sie die Aufspaltung sowohl für Positronium als auch für Myonium. (4 Punkte)

Der magnetische Wechselwirkungsoperator \hat{V}_{mag} kann für ein Magnetfeld nur in z -Richtung wieder deutlich vereinfacht werden

$$\hat{V}_{mag} = -(\boldsymbol{\mu}_e + \boldsymbol{\mu}_{e^+/\mu^+}) \cdot \mathbf{B} = -(\gamma_1 \hat{\mathbf{S}}_1 + \gamma_2 \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \mathbf{B} \quad (33)$$

$$= -(\gamma_1 \hat{S}_{1,z} + \gamma_2 \hat{S}_{2,z}) \cdot B_0$$

ΔE_B berechnet sich somit einfach aus Anwendung der Spinoperatoren auf ihre Eigenfunktionen:

$$\Delta E_B = \langle m_{S_1}, m_{S_2} | (\gamma_1 \hat{S}_{1,z} + \gamma_2 \hat{S}_{2,z}) \cdot B_0 | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle \quad (34)$$

$$= \hbar(m_{S_1} \gamma_1 + m_{S_2} \gamma_2) \cdot B_0$$

Hierbei gelten die Eigenwertgleichungen $\hat{S}_{1,z} |m_{S_1}, m_{S_2}\rangle = \hbar m_{S_1} |m_{S_1}, m_{S_2}\rangle$ und $\hat{S}_{2,z} |m_{S_1}, m_{S_2}\rangle = \hbar m_{S_2} |m_{S_1}, m_{S_2}\rangle$. Da es sich bei Elektron, Positron und Antimyon um Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen handelt, kann die magnetische Spinquantenzahl lediglich die Werte $\pm \frac{1}{2}$ annehmen. Der Grundzustand $1s_{1/2}$ wird somit im Allgemeinen vierfach aufgespalten, je nach Ausrichtung der Spinvektoren des jeweiligen gebundenen Systems.

$$\Delta E_{B,1} = \frac{\hbar}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = m_{S_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta E_{B,2} = \frac{\hbar}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = \frac{1}{2}, m_{S_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta E_{B,3} = \frac{\hbar}{2} (-\gamma_1 + \gamma_2) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = -\frac{1}{2}, m_{S_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta E_{B,4} = \frac{\hbar}{2} (-\gamma_1 - \gamma_2) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = m_{S_2} = -\frac{1}{2}$$

Für das Positronium gilt wieder $\gamma_1 = \gamma_{e^-} = \gamma_{e^+} = \gamma_2$, sodass hier $\Delta E_{B,2} = \Delta E_{B,3} = 0$ ist. Für die beiden Fälle mit entlang der Quantisierungsachse parallel ausgerichteten Spins gilt

$$\Delta E_{B,1} = \frac{\hbar}{2} (\gamma_{e^-} + \gamma_{e^+}) B_0 = \hbar \gamma_{e^-} B_0 = -\Delta E_{B,4} \quad (35)$$

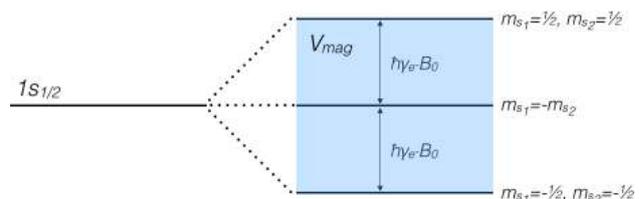


Abbildung 4: Paschen-Back-Effekt im Positronium²

Im Myonium sind die gyromagnetischen Verhältnisse von Elektron und Antimyon verknüpft über

² m bezeichnet hier nach wie vor die magnetische Spinquantenzahl und sollte nicht etwa mit der Teilchenmasse verwechselt werden.

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \gamma_{\mu^+} = g_{\mu^+} \frac{e}{2m_{\mu^+}} = g_{\mu^+} \frac{m_{e^-}}{m_{\mu^+}} \frac{\mu_B}{\hbar} \\ &\approx \frac{m_{e^-}}{m_{\mu^+}} \gamma_{e^-} = \frac{m_{e^-}}{m_{\mu^+}} \gamma_1, \end{aligned} \quad (36)$$

mit $m_e/m_{\mu^+} \approx 0,0048$. Es ergeben sich für Myonium also vier Aufspaltungen des $1s_{1/2}$ -Grundzustands, wobei $\Delta E_{B,2}$ eine geringfügig schwächere positive Korrektur, als $\Delta E_{B,1}$ darstellt und ebenso $\Delta E_{B,3}$ eine etwas schwächere negative Korrektur, als $\Delta E_{B,4}$ beschreibt.

$$\begin{aligned} \Delta E_{B,1} &= \frac{\hbar}{2} \gamma_1 \left(1 + \frac{m_{e^-}}{m_{\mu^+}} \right) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = m_{S_2} = \frac{1}{2} \\ \Delta E_{B,2} &= \frac{\hbar}{2} \gamma_1 \left(1 - \frac{m_{e^-}}{m_{\mu^+}} \right) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = \frac{1}{2}, m_{S_2} = -\frac{1}{2} \\ \Delta E_{B,3} &= \frac{\hbar}{2} \gamma_1 \left(-1 + \frac{m_{e^-}}{m_{\mu^+}} \right) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = -\frac{1}{2}, m_{S_2} = \frac{1}{2} \\ \Delta E_{B,4} &= \frac{\hbar}{2} \gamma_1 \left(-1 - \frac{m_{e^-}}{m_{\mu^+}} \right) B_0 \quad \text{für } m_{S_1} = m_{S_2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

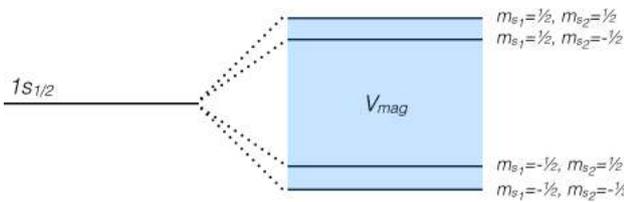


Abbildung 5: Paschen-Back-Effekt im Myonium³

- b) Berücksichtigen sie nun den Einfluss von \hat{V}_{HFS} auf die in a) berechneten Unterzustände. Behandeln sie hierzu \hat{V}_{HFS} als kleine Störung auf die Unterzustände und berechnen sie die Energiekorrektur

$$\Delta E_{HFS} = \langle m_{S_1}, m_{S_2} | \hat{V}_{HFS} | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle. \quad (37)$$

Verwenden sie hierzu die folgende Identität für den Operator $\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$ zusammengesetzt aus den Spinoperatoren der Systemkomponenten

$$\begin{aligned} \langle m_{S_1}, m_{S_2} | \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle &= \langle m_{S_1}, m_{S_2} | \hat{S}_{1,z} \hat{S}_{2,z} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\hat{S}_{1,+} \hat{S}_{2,-} + \hat{S}_{1,-} \hat{S}_{2,+}) | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle \\ &= \langle m_{S_1}, m_{S_2} | \hat{S}_{1,z} \hat{S}_{2,z} | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle \end{aligned} \quad (38)$$

Skizzieren sie die sich daraus ergebende Korrektur der Energieniveaus aus Aufgabenteil a). (4 Punkte)

Die Korrekturen auf die Energieniveaus des Paschen-Back-Regimes ergeben sich leicht mithilfe der in der Aufgabenstellung gegebenen Identität:

$$\Delta E_{HFS} = A \langle m_{S_1}, m_{S_2} | \hat{S}_{1,z} \hat{S}_{2,z} | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle = A \hbar^2 m_{S_1} m_{S_2} \quad (39)$$

Aus diesem Ausdruck wird ersichtlich, dass Zustände mit gleichem Vorzeichen in der magnetischen Spinquantenzahl energetisch angehoben werden, während solche mit umgekehrtem Vorzeichen nach unten korrigiert werden. Das

²Die Ungenauigkeit kommt daher, dass g_{μ^+} nur ungefähr gleich $-g_{e^-}$ ist.

entspricht der Erwartung, dass ein Zweiteilchensystem mit parallel ausgerichteten Spins⁴ eine höhere Energie aufweist, als eines mit antiparallelen Spinvektoren.

Für das Positronium bedeutet es, dass die beiden außen liegenden Paschen-Back-Aufspaltungen energetisch abgesenkt werden um den Wert $-A\hbar^2/4$, während die zwei inneren um $A\hbar^2/4$ angehoben werden.

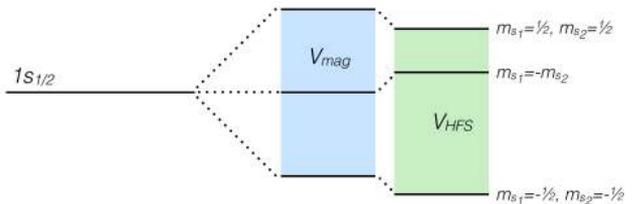


Abbildung 6: Paschen-Back-Regime von Positronium mit Hyperfeinstrukturkorrekturen

Beim Myonium treten Korrekturen desselben Betrags auf. Hier findet allerdings eine Annäherung der beiden oberen Aufspaltungen $\Delta E_{B,1}$ und $\Delta E_{B,2}$, während die unteren Aufspaltungen sich in der Hyperfeinstruktur weiter aufspalten, wie in Abbildung 7 skizziert.

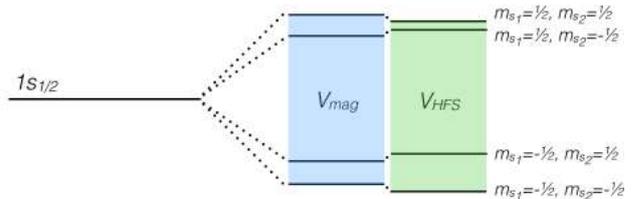


Abbildung 7: Paschen-Back-Regime von Myonium mit Hyperfeinstrukturkorrekturen

⁴Genauer: Projektion des Spinvektors entlang der Quantisierungsachse