

Physik VI - Übungsblatt 10

Alex Ilin, Kristina Klafka und Janosh Riebesell

01. Juli 2014

Präsenzaufgaben

1 Drei- und Vier-Niveaulaser

Erklären Sie, warum die Schwelleninversion für einen Vier-Niveaulaser einfacher zu erreichen ist, als für einen Drei-Niveaulaser.

Vorbemerkung: Mit *Inversion* bezeichnet man den Zustand eines lasenden Systems, in dem die Teilchendichte N_2 des energetisch höher liegenden Laser-Zustands größer ist, als die des unteren am Laser-Übergang beteiligten Zustands N_1 . Die Stärke der Inversion wird durch den Parameter N charakterisiert. Inversion liegt genau dann vor, wenn N größer null ist:

$$N = N_2 - N_1 > 0 \tag{1}$$

Die Existenz einer Inversion sichert, dass die stimulierte Emission nicht von der induzierten Absorption im Lasermedium übertroffen wird. Dies ist aber noch kein Garant dafür, dass Laseremission zustande kommt. Dafür wird zusätzlich eine *Schwelleninversion* $N_c > 0$ benötigt, die dafür sorgt, dass die Verstärkung im Lasermedium groß genug ist, um die Verluste des Laserresonators auszugleichen. Abbildung 1 zeigt den inneren Aufbau eines Lasers und die Position von Lasermedium und -resonator.

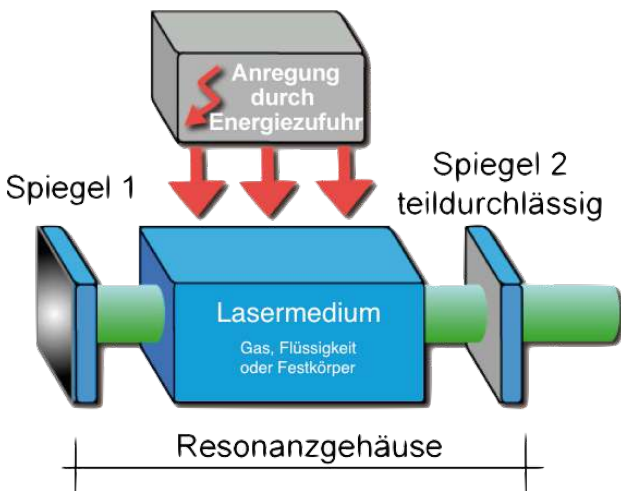


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der wichtigsten Komponenten eines Lasers

Um klären, welchen Nachteil ein Drei-Niveaulaser hat, sollte zunächst kurz etabliert werden, wie ein Vier-Niveaulaser funktioniert. Zur Realisierung eines Vier-Niveaulasers wird ein System benötigt, das aus mindestens vier Energieniveaus besteht (s. Abb. 2). Das nullte Niveau sei der Grundzustand mit der Besetzungsdichte N_0 . Durch Absorption der Pumpenergie - meistens Licht - werden Ionen vom Grundzustand in das Niveau 3 mit der Besetzungsdichte N_3 angeregt. Von diesem Niveau aus erfolge ein *schneller* und *strahlungsloser* Zerfall in das obere Laserniveau 2 mit

der Besetzungsdichte N_2 . Der Laserübergang findet nun vom Niveau 2 in das Niveau 1 mit der Besetzungsdichte N_1 statt, worauf wieder ein *schneller* Zerfall in den Grundzustand folge.¹ Aufgrund der kurzen Lebensdauer der Niveaus 1 und 3 kann näherungsweise angenommen werden, dass sie nicht besetzt sind, d.h. $N_1 = N_3 = 0$. Dies hat zur Folge, dass es beim idealen Vier-Niveau-Laser

1. keine stimulierte Emission auf der Pumpwellenlänge gibt
2. keine Reabsorption auf der Laserwellenlänge auftritt.

Ein Drei-Niveaulaser hingegen besitzt entweder ober- oder unterhalb des Laserübergangs nur ein aktives Niveau. Das bedeutet entweder,

1. dass der Zustand der mit der Laserfrequenz zerfällt, derselbe ist, in den gepumpt wird (E_3 fällt weg). Hier befinden sich Teilchen bis zum spontanen Zerfall bzw. der sukzessiven stimulierten Emission in Zustand 2, sodass es über diesen Zeitraum auch zu Wechselwirkung mit der Pumpenergie kommt. Dies hat den stimulierten Rückfall eines Teils der Population in den Grundzustand zur Folge und erschwert somit die Inversionsbildung. Oder aber
2. der Grundzustand wird sowohl durch die Laserfrequenz an Zustand 2 der Abbildung 2 als auch durch die Pumpe an den Zustand 3 gekoppelt (E_1 fällt weg). In diesem Fall kann es passieren, dass Teilchen in diesem Zustand durch Laser-Photonen induziert in Zustand 2 angeregt werden, wieder zerfallen und so quasi zwischen diesen beiden Zuständen pendeln ohne netto Laserlicht zu produzieren. Gleichzeitig ist typischerweise die thermische Besetzung des Grundzustands sehr viel höher, als zum Beispiel der des Zustands E_1 beim Vier-Niveaulaser. Diese Effekte erhöhen die Verluste im Resonator bzw. erschweren den Aufbau der Schwelleninversion.

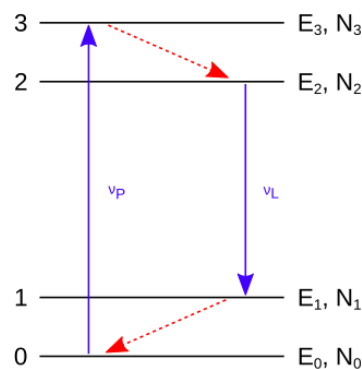


Abbildung 2: Energieübergänge in einem Vier-Niveaulaser. Gestrichelte Pfeile symbolisieren schnell ablaufende Übergänge.

2 Laserprinzip, Pumpschemata

Welche der in Abbildung 3 dargestellten Pumpschemata kann prinzipiell keine Laserstrahlung erzeugen? Geben Sie eine kurze Begründung der Antwort.

¹ Diese Forderungen an die Zustände und ihre Zerfallsraten eines Lasermediums erklären übrigens auch, warum so wenige Materialien für den Bau eines Lasers in Frage kommen.

Hinweis: Betrachten Sie die Niveaus 1, 2, 3 des aufgespaltenen Grundzustandes und die Niveaus 4, 5 des angeregten Zustandes jeweils als thermisch gekoppelt.

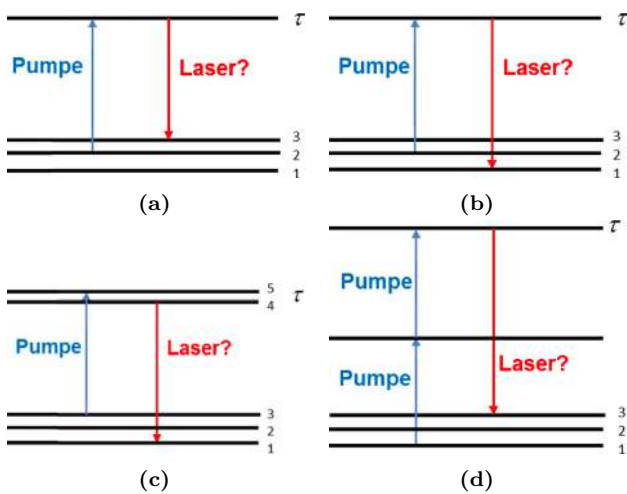


Abbildung 3: Vier verschiedene Pumpschemata als Kandidaten für einen Laser

- a) Dieser Prozess ist in der Lage, Laserlicht zu produzieren. Es handelt sich um einen Drei-Niveaulaser mit Besetzungsinversion zwischen den Zuständen 3 und 4. Wichtig ist, dass Zustand 3 relativ schnell zerfällt, da sich ansonsten Teilchen hier aufstauen könnten, was die Inversion aufheben würde.
- b) Diese Konfiguration ist für einen Laser ungeeignet. Für rein thermische Kopplung ist der Zustand 2 deutlich schwächer bevölkert, als Zustand 1. Das Besetzungsverhältnis wird in guter Näherung durch die Boltzmann-Verteilung $N_i \propto e^{E_i/k_B T}$ beschrieben. Für eine typische Energiedifferenz von 0,1 eV ergibt sich bereits eine um den Faktor 50 kleinere Besetzung des energetisch höheren Zustands. Daraus folgt aber, dass selbst das vollständige Entpumpen des Zustands 2 keine Bevölkering in Zustand 4 produziert, die oberhalb der von Zustand 1 liegt, d.h. eine Inversion ist nicht möglich. Die induzierte Absorption bei der Laserfrequenz wird immer stärker sein, als die stimulierte Emission.
- c) Auch hiermit ist kein Lasen möglich (s. Begründung in b)).
- d) Mit diesem Pumpschema ist ein Laserbetrieb möglich. Der Zustand 1 ist durch die thermische Kopplung stark besetzt, sodass bei ausreichender Pumpleistung und geringen Verlusten auf dem Zwischenniveau eine hohe Bevölkering des energetisch höchsten Zustands erzeugt werden kann, die insbesondere die des dritten Zustands übertrifft, sodass Inversion vorliegt.

Übungsaufgaben

1 Zeitabhängige Ratengleichung (4 Punkte)

Gegeben sei ein homogenes Zwei-Niveausystem aus den Zuständen 1 und 2 mit der Gesamtdichte N , der Lebensdauer des oberen Niveaus τ und vernachlässigbarer thermischer Besetzung im oberen Niveau.

Berechnen Sie die zeitabhängige Besetzungsdichte $N_2(t)$ im oberen Niveau in Abhängigkeit von der eingestrahelten Intensität $I(t)$ des resonanten Strahlungsfeldes, wenn dieses bei $t = 0$ eingeschaltet wird, d.h. $I(t) = I \theta(t)$ mit $I \in \mathbb{R}$ konstant und der Heavisideschen Sprungfunktion. Drücken Sie

das Ergebnis mit den Größen I und I_S aus (s. Kap. 7.1 der Vorlesung). I_S ist die sogenannte Sättigungsintensität mit $I/I_S = 2B\tau$ und $B = B_{12} = B_{21}$ der Einstein-Koeffizient.

Als Ratengleichung bezeichnet man das Gleichungssystem, das die Zusammenhänge zwischen der Photonendichte n des Strahlungsfeldes in einem Laser und den Besetzungsdichten N_i der am Laserprozess beteiligten Energieniveaus E_i beschreibt.

In einem Systems mit nur zwei an der Laseremission beteiligten Niveaus E_1 und E_2 betrachtet man hierzu den Einfluß

1. spontaner und stimulierter Emission sowie induzierter Absorption von Photonen beschrieben durch die jeweilige Lebensdauer bzw. Übergangsrate pro spektraler Energiedichte, in diesem Feld zusammenfassend meist Einstein-Koeffizienten genannt mit den Formelzeichen (Reihenfolge wie oben) A_{21} , B_{21} und B_{12} ,
2. der Zerfallsraten R_1 und R_2 in unbeteiligte Zustände,
3. der Pumprate P , mit der das obere Laserniveau aufgefüllt wird und
4. der Resonatorverlustrate β .

Das obere Niveau E_2 wird sich durch spontane und stimulierte Emission nach E_1 sowie durch Zerfall in unbeteiligte Zustände leeren und durch induzierte Absorption und den Pumpmechanismus füllen. Umgekehrt füllt sich das untere Niveau E_1 durch stimulierte und spontane Emission aus E_2 und leert sich durch induzierte Absorption und Zerfall in unbeteiligte Zustände. Die Photonendichte steigt durch spontane und induzierte Emission und sinkt durch induzierte Absorption und Resonatorverluste. Sind die beiden Niveaus E_1 und E_2 entartet, d.h. besitzen sie statistische Gewichte g_1 und g_2 , so lauten die Ratengleichungen mit der spektralen Energiedichte $w(\nu)$ in Abhängigkeit von der Photonenfrequenz ν wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= B_{12}w(\nu)(N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1) + A_{21}N_2 - R_1N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= P - B_{21}w(\nu)(N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1) - A_{21}N_2 - R_2N_2 \quad (2) \\ \frac{dn}{dt} &= B_{21}w(\nu)(N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1) - \beta n \end{aligned}$$

In diesen Ratengleichungen wurde die thermische Besetzung des oberen Niveaus E_2 bereits vernachlässigt. Die Berechnung der Besetzungsdichte $N_2(t)$ vereinfacht sich in diesem Fall erheblich durch den Umstand, dass in der Aufgabenstellung keine Angaben zu Entartung ($g_1 = g_2 = 1$), Zerfall in unbeteiligte Zustände ($R_1 = R_2 = 0$) gemacht werden. Eine Pumpe, die aus einem dritten Zustand, zum Beispiel dem Grundzustand E_0 nach E_2 anregt, fällt auch weg ($P = 0$), da von vornherein nur zwei Niveaus betrachtet wurden. Aus $g_1 = g_2$ folgt direkt $B_{12} = B_{21} \equiv B$. Mit $A_{21} = \frac{1}{\tau}$ lautet die vereinfachte Ratengleichung für den Zustand E_2

$$\frac{dN_2}{dt} = -Bw(\nu)(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau} \quad (3)$$

Diese Gleichung kann noch weiter umgeformt werden, um die Abhängigkeit von der eingestrahelten Intensität zu Tage zu bringen. Man definiert die stimulierte Übergangsrate

$$W_{21} = B_{21}w(\nu) = \sigma_{21}F, \quad (4)$$

wobei σ_{21} der Streuquerschnitt des Übergangs $2 \rightarrow 1$ und F der Photonenfluss, also Photonenzahl pro Fläche und Zeit ist. Letzterer kann auch ausgedrückt werden durch die Intensität geteilt durch die Energie eines Photons $F = \frac{I}{h\nu}$. Mit der Sättigungsintensität $I_S = \frac{h\nu}{2\sigma\tau}$ kann man also schreiben

$$\tau B w(\nu) = \tau \sigma F = \tau \sigma \frac{I}{h\nu} = \frac{I}{\frac{h\nu}{\sigma\tau}} = \frac{I}{2I_S} \quad (5)$$

Einsetzen in Gleichung (3) ergibt

$$\begin{aligned} \tau \frac{dN_2}{dt} &= -\frac{I}{2I_S} (2N_2 - N) - N_2 \\ &= \frac{I}{2I_S} N - \left(1 + \frac{I}{I_S}\right) N_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung ist durch Integration analytisch lösbar.

$$\begin{aligned} \tau \int \frac{dN_2}{\frac{I}{2I_S} N - \left(1 + \frac{I}{I_S}\right) N_2} &= \int dt \\ \Rightarrow -\frac{\tau}{1 + \frac{I}{I_S}} \ln \left(\frac{I}{2I_S} N - \left(1 + \frac{I}{I_S}\right) N_2 \right) &= t + c \\ \Rightarrow \frac{I}{2I_S} N - \left(1 + \frac{I}{I_S}\right) N_2 &= c' e^{-\left(1 + \frac{I}{I_S}\right) \frac{t}{\tau}} \\ \Rightarrow N_2 = -\frac{c'}{\left(1 + \frac{I}{I_S}\right)} e^{-\left(1 + \frac{I}{I_S}\right) \frac{t}{\tau}} + \frac{\frac{I}{2I_S} N}{1 + \frac{I}{I_S}} \\ \Rightarrow N_2 = -c'' e^{-\left(1 + \frac{I}{I_S}\right) \frac{t}{\tau}} + \frac{N}{2\left(1 + \frac{I}{I_S}\right)} \end{aligned} \quad (7)$$

Da die thermische Besetzung des oberen Zustands vernachlässigbar sein soll und bis $t = 0$ keine Intensität eingestrahlt wird, die zu Anregungen führen könnte, muss gelten $N_2(t \leq 0) = 0$. Bisher wurde die Zeitabhängigkeit der Intensität nicht explizit mitgeführt. Für den Zeitpunkt $t = 0$ gilt $I(t) = I\theta(t = 0) = I$. Aus der Anfangsbedingung ergibt sich die Integrationskonstante c'' somit zu

$$N_2(t = 0) = -c'' + \frac{N}{2\left(1 + \frac{I}{I_S}\right)} = 0 \Rightarrow c'' = \frac{N}{2\left(1 + \frac{I}{I_S}\right)}$$

Die Besetzungsdichte des oberen Niveaus im Verlauf der Zeit beträgt somit

$$N_2 = -\frac{N}{2\left(1 + \frac{I}{I_S}\right)} e^{-\left(1 + \frac{I}{I_S}\right) \frac{t}{\tau}} + \frac{N}{2\left(1 + \frac{I}{I_S}\right)} \quad (8)$$

Dieser Ausdruck wirkt zunächst etwas unhandlich. Für den Spezialfall $I = 99 I_S$ geht Gleichung (8) über in

$$N_2 = \frac{99}{200} N \left(1 - e^{-100 \frac{t}{\tau}}\right) \approx \frac{N}{2} \left(1 - e^{-100 \frac{t}{\tau}}\right) \quad (9)$$

Für große Intensitäten würde man also erwarten, dass das System nach kurzer Zeit die Hälfte seiner Population in den energetisch höheren Zustand verschiebt. Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 4 dargestellt.

Gilt umgekehrt $I_S = 99 I$, dann ist (8)

$$N_2 = \frac{N}{200} \left(1 - e^{-\frac{100}{99} \frac{t}{\tau}}\right) \approx \frac{N}{200} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (10)$$

In diesem Fall dauert der Besetzungsvorgang deutlich länger als im obigen Fall und die Besetzung erreicht nur etwa ein

hundertstel von der bei hoher Strahlungsintensität. Für den Graphen, siehe Abbildung 5.

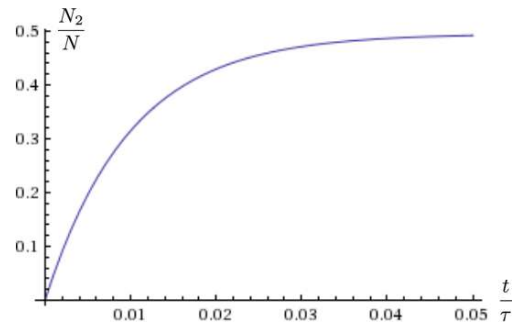


Abbildung 4: Besetzungsdichte des oberen Zustands im Verlauf der Zeit für eine Intensität weit über der Sättigungsintensität geht asymptotisch gegen die halbe Gesamtpopulation $N/2$.

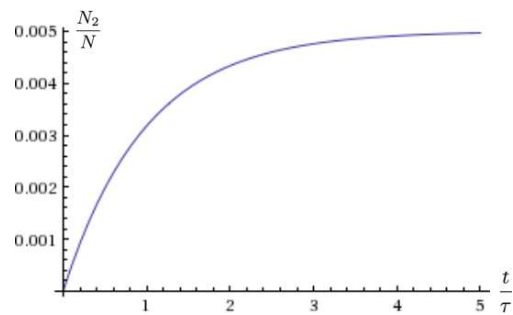


Abbildung 5: Besetzungsdichte des oberen Zustands im Verlauf der Zeit für eine schwache Intensität.

2 Optischer Verstärker

(6 Punkte)

Für ein verstärkendes Vier-Niveausystem (s. Abb. 6) der Länge l mit Verlusten beschrieben durch den Koeffizienten α gilt folgende Differentialgleichung für die Signalintensität $I(z)$

$$\frac{dI(z)}{dz} = \frac{\sigma N_{2,0}}{1 + \frac{I(z)}{I_S}} I(z) - \alpha I(z). \quad (11)$$

Hierbei ist $N_{2,0} = N_2$, wenn nur mit W_p gepumpt wird, aber noch keine Intensität auf dem Laserübergang $E_2 \rightarrow E_1$ umläuft. Die entlang der z -Achse eingestrahlte Signalintensität sei $I_{in} = I(z = 0)$. Das Medium wird räumlich homogen gepumpt, d.h. die Inversion ohne eingestrahlte Signalintensität $N_{2,0}$ ist unabhängig von z .³

- a) Berechnen sie die Intensität am Verstärkerausgang $I_{out} = I(z = l)$ für $I(z) \ll I_S$, d.h. für einen ungesättigten Verstärker. (1 Punkt)

²Bei der Berechnung dieses Ergebnisses mithilfe von Ratengleichungen wurden der Quantenmechanik eigene Kohärenzeffekte vernachlässigt, die besonders bei der Anregung eines Systems mit Lasern auftreten. Eine korrekte, quantenmechanische Rechnung führt zu den bereits bekannten Rabi-Oszillationen. Das Ratengleichungen dennoch oft gute Ergebnisse liefern, liegt an dekohärierenden Effekten, zum Beispiel durch Phonon-Streuung in Festkörpern.

³Ein Verstärker muss bereits vor dem Empfang des zu verstärkenden Signals im Inversionszustand sein, damit es zu viel stimulierter Emission durch die Signalphotonen kommt.

Im ungesättigten Zustand vereinfacht sich die Differentialgleichung (11), die die (zunehmende) Signalintensität beim durchlaufen des Verstärkers beschreibt zu

$$\frac{dI(z)}{dz} = (\sigma N_{2,0} - \alpha) I(z) \quad (12)$$

Hierbei handelt es sich wieder um eine lineare, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die analytisch durch einfache Integration lösbar ist.

$$\ln(I(z)) = \int \frac{dI(z)}{I(z)} = \int (\sigma N_{2,0} - \alpha) dz = (\sigma N_{2,0} - \alpha) z + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ konstant. Durch Exponentiation erhält man die Lösung der Differentialgleichung

$$I(z) = c' e^{(\sigma N_{2,0} - \alpha)z} \quad (13)$$

Die Integrationskonstante c' wird durch die Eingangsbedingung $I(z = 0) = I_{\text{in}}$ auf $c' = I_{\text{in}}$ festgelegt. Die ausgehende Intensität $I_{\text{out}} = I(z = l)$ beträgt somit für einen ungesättigten Verstärker

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} e^{(\sigma N_{2,0} - \alpha)l} \quad (14)$$

- b)** Lösen Sie die Differentialgleichung für $I(z) \gg I_S$, d.h. für einen gesättigten Verstärker. Wie vereinfacht sich das erhaltene Ergebnis für kleine Verluste $\alpha l \ll 1$? (3 Punkte)

Ist der Verstärker gesättigt gilt für (11) näherungsweise

$$\frac{dI(z)}{dz} = \sigma N_{2,0} I_S - \alpha I(z). \quad (15)$$

Diese Differentialgleichung ist vom selben Typ, wie in **a)**. Sie lässt sich dementsprechend auf dieselbe Weise lösen:

$$\int \frac{dI(z)}{\sigma N_{2,0} I_S - \alpha I(z)} = \int dz \quad (16)$$

Auswerten der Integrale liefert

$$-\frac{1}{\alpha} \ln(\sigma N_{2,0} I_S - \alpha I(z)) = z + c \quad (17)$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$I(z) = -\frac{c'}{\alpha} e^{-\alpha z} + \frac{\sigma}{\alpha} N_{2,0} I_S \quad (18)$$

Aus der Eingangsbedingung folgt diesmal $I_{\text{in}} = -\frac{c'}{\alpha} + \frac{\sigma}{\alpha} N_{2,0} I_S$ bzw. nach der Integrationskonstanten c' aufgelöst

$$c' = \sigma N_{2,0} I_S - \alpha I_{\text{in}} \quad (19)$$

Damit kann die Lösung $I(z)$ am Punkt $z = l$ spezifiziert werden

$$I_{\text{out}} = I(z = l) = \left(I_{\text{in}} - \frac{\sigma}{\alpha} N_{2,0} I_S \right) e^{-\alpha l} + \frac{\sigma}{\alpha} N_{2,0} I_S \quad (20)$$

Für sehr kleine Verluste $\alpha l \ll 1$ folgt daraus, dass die eingestrahlte Intensität in etwa gleich der ausgestrahlten ist:

$$I_{\text{out}} \approx I_{\text{in}} - \frac{\sigma}{\alpha} N_{2,0} I_S + \frac{\sigma}{\alpha} N_{2,0} I_S = I_{\text{in}} \quad (21)$$

- c)** Wie groß ist die tatsächliche Inversion N_2 des Vier-Niveausystems, die das Abräumen des lasenden Zustands durch die eingestrahlte Intensität berücksichtigt, in den Fällen der Aufgabenteile **a)** und **b)** für $I(l) \ll I_S$ bzw. $I(l) = 49 I_S$ am Verstärker Ausgang? (1 Punkt)

Auf Seite 17, Kapitel 7 des Skriptes findet sich folgender Zusammenhang zwischen der Inversion $N_{2,0}$ für den Fall, dass noch keine stimulierte Emission aus dem Zustand 2 durch eingestrahlte Intensität auftritt und der Inversion N_2 , die diesen Effekt berücksichtigt und folglich kleiner ausfallen sollte. Die Besetzungsdichte $N_1 \approx 0$ des schnell zerfallenden Zustands 1 kann für die Inversion in beiden Fällen vernachlässigt werden.

$$N_2 = \frac{N_{2,0}}{1 + I/I_S} \quad (22)$$

Für den Fall aus **a)** mit $I(l) \ll I_S$ beträgt die Inversion während des Verstärkerbetriebs nach Gleichung (22)

$$N_2(z = l) = \frac{N_{2,0}}{1 + I(l)/I_S} \approx N_{2,0} \quad (23)$$

Bei der hohen Intensität $I(l) = 49 I_S$ von Aufgabenteil **b)** gilt

$$N_2(z = l) = \frac{N_{2,0}}{1 + I(l)/I_S} = \frac{N_{2,0}}{1 + 49 I_S/I_S} = \frac{N_{2,0}}{50} \quad (24)$$

- d)** Welcher der beiden Fälle **a)** oder **b)** hat auf die Pumpleistung bezogen eine höhere Effizienz? Eine Qualitative Argumentation genügt. (1 Punkt)

Die Effizienz des Verstärkers ist dann hoch, wenn er eine starke Inversion aufweist, die mit einer möglichst geringen Pumpleistung erzeugt wurde.⁴ Bei gleicher Pumpleistung hat deshalb der ungesättigte Verstärker mit hoher Inversion die bessere Effizienz.

3 Direktes Pumpen ins obere Laserniveau (4 Punkte)

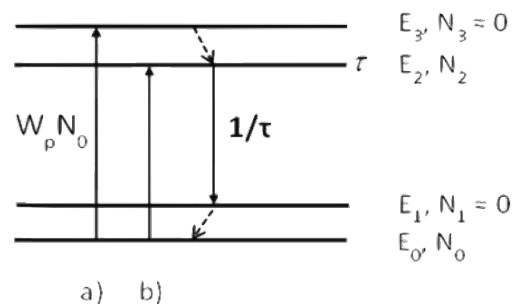


Abbildung 6: Zustandsschema mit Übergängen für einen Drei- und Vier-Niveaulaser

Ein Dauerstrich-Laser⁵, der auf dem Übergang $E_2 \rightarrow E_1$ anschwingen soll, benötige zum Erreichen der Schwelle eine Schwellinversionsdichte N_c . Die Gesamtdichte der Laserzentren, also der relevanten aktiven Atome im Trägermaterial, sei N . Gehen Sie jeweils davon aus, dass

⁴Eine starke Inversion ist von Vorteil, da die Signalphotonen so auf ihrem Weg durch den Verstärker viele angeregte Teilchen vorfinden und zu stimulierter Emission bringen können, sodass die Intensität des Eingangssignals erhöht wird.

⁵Deutsch für "continuous wave laser".

die Zerfälle von $E_3 \rightarrow E_2$ und $E_1 \rightarrow E_0$ sehr schnell passieren. Berechnen Sie die nötige Schwellpumprate W_{cp} in Abhängigkeit von N_c/N

a) für den Fall des Pumpens über N_3 , d.h. im Vier-Niveau-Betrieb. (1 Punkt)

Diese Aufgabe lässt sich wieder durch Aufstellen der Ratengleichung für den Zustand 2 lösen. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist dann eine Gleichung, die N_2 in Abhängigkeit aller Systemparameter beschreibt. Wegen $N_1 \approx 0$ kann N_2 hier gleich der Schwellinversionsdichte N_c gesetzt werden und dann nach der Schwellpumprate W_{cp} aufgelöst werden.

Folgende Prozesse (in der Reihenfolge von oben nach unten im Niveauschema) be- bzw. entvölkern den Zustand 2:

- + der (vermutlich strahlungslose) spontane Zerfall N_3/τ_{32} von Zustand 3 nach Zustand 2
- der spontane Zerfall bei der Laserfrequenz N_2/τ_{21} von Zustand 2 nach Zustand 1
- die stimulierte Emission durch Laserphotonen $W_{21}N_2$ beim Übergang von Zustand 2 nach Zustand 1
- + die induzierte Absorption von Laserphotonen $W_{12}N_1$ beim Übergang von Zustand 1 nach Zustand 2

Andere Übergänge zwischen den vier Niveaus, z.B. von N_2 direkt nach N_0 , sind in Abbildung 6 nicht eingezeichnet und sollten folglich vernachlässigbar klein oder komplett verboten sein.

Da in diesem System die Zustände 1 und 3 sehr schnell zerfallen sollen, können schon vor der Rechnung einige Vereinfachungen gemacht werden. Zunächst sollte wegen $N_3 \approx 0$ der Zerfall N_3/τ_{32} ungefähr gleich der Pumprate $W_p N_0$ sein. Wegen $N_1 \approx 0$ kann man außerdem sagen, dass der Übergang $W_{12}N_1$ von Zustand 1 nach Zustand 2 nicht vorkommt, d.h. $W_{12}N_1 \approx 0$. Die Ratengleichung für Zustand 2 lautet somit

$$\frac{dN_2}{dt} = W_p N_0 - \frac{N_2}{\tau_{21}} - W_{21} N_2 \quad (25)$$

In dieser Gleichung besitzt leider neben N_2 auch noch N_0 eine unbekannt Zeitabhängigkeit. Diese kann aber wegen $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \approx N_0 + N_2$ durch die zeitunabhängige Gesamtpopulation des Systems N und die von N_2 ersetzt werden:

$$\frac{dN_2}{dt} = W_p N - \left(W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21}\right) N_2 \quad (26)$$

Diese Art Gleichung wurde bereits mehrfach in den Aufgaben 1 und 2 gelöst. Das Ergebnis lautet

$$N_2(t) = -c e^{-\left(W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21}\right)t} + \frac{W_p N}{W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21}} \quad (27)$$

mit der Integrationskonstanten c , die wie in Aufgabe 1 gezeigt den Wert $c = W_p N / (W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21})$ besitzt, falls die Pumpe zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird und somit bis zu diesem Zeitpunkt wegen vernachlässigbarer thermischer Besetzung gelten muss $N_2(t \leq 0) = 0$.

Die Zeitabhängigkeit beschreibt die Entwicklung in den Gleichgewichtszustand. Die Berechnung einer Schwellinversionsdichte macht nur im Gleichgewicht Sinn. Man betrachtet also hierzu den Fall

$$N_{2,\text{equi}} = N_2(t \rightarrow \infty) = \frac{W_p N}{W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21}} \quad (28)$$

In der Aufgabenstellung ist von keinen Resonatorverlusten die Rede. Sie werden deshalb als vernachlässigbar bzw. nicht vorhanden angesetzt. In diesem Fall ist die Gleichgewichtsinversion $N_{2,\text{equi}} - N_{1,\text{equi}} \approx N_{2,\text{equi}}$ gleich der Schwellinversion N_c , d.h. $N_{2,\text{equi}} = N_c$ und die Pumpleistung W_p gerade der Schwellpumpleistung W_{cp} , sodass Gleichung (28) wie folgt lautet

$$N_c = \frac{W_{cp} N}{W_{cp} + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21}} \quad (29)$$

Auflösen nach der Schwellpumpleistung W_{cp} liefert

$$W_{cp} = \frac{(1 + W_{21} \tau_{21}) N_c}{(N - N_c) \tau_{21}} \quad (30)$$

In dieser Gleichung ist wieder die Intensität I_{21} der für den Laserübergang resonanten Strahlung versteckt. (30) kann umgeschrieben werden zu

$$W_{cp} = \frac{(1 + I_{21}/2I_S) N_c}{(N - N_c) \tau_{21}} \quad (31)$$

Auch dieser Ausdruck ist noch etwas unhandlich. Für den Fall kleiner Intensitäten $I_{21} \ll I_S$ vereinfacht er sich deutlich. Aus Aufgabe 1 ist nämlich bekannt, dass für kleine Intensitäten auch die Inversionsdichte N_c gegenüber der Gesamtdichte der aktiven Teilchen im Lasermedium N klein ausfällt, sodass (31) für kleine Intensitäten genähert werden kann zu

$$W_{cp} \approx \frac{N_c}{N \tau_{21}} \quad (32)$$

Für sehr große Intensitäten $I_{21} \gg I_S$ zeigte sich in Aufgabe 1, dass fast genau die Hälfte der aktiven Teilchen im energetisch höher liegenden Zustand vorkamen. Die Erkenntnis bezog sich auf ein Zwei-Niveausystem. Da die Zustände 1 und 3 sehr schnell zerfallen sollen, können sie dem Pumpprozess aber keine nennenswerte Population entziehen, sodass sich das System in dieser Hinsicht gleich verhält. Die halbe Population in Zustand 2 führt zu einer Gleichgewichtsinversion von $N_{2,\text{equi}} = N_c = \frac{N}{2}$, sodass die Schwellpumpleistung unabhängig von den Teilchendichten wird:

$$W_{cp} \approx \frac{1}{\tau_{21}} \left(1 + \frac{I_{21}}{2I_S}\right) \quad (33)$$

b) für den Fall des Pumpens direkt nach N_2 , d.h. im Drei-Niveau-Betrieb. (2 Punkte)

Wird Zustand 2 durch die Pumpe direkt an Zustand 0 gekoppelt, was beim Laserbetrieb ohne Zustand 3 unvermeidlich ist, so ergibt sich ein weiterer Effekt, der den Zustand 2 entvölkert. Aktive Teilchen in Zustand 2 werden durch die Pumpenergie zur stimulierten Emission gebracht, was durch einen weiteren Term $-W_p N_2$ in der Differentialgleichung (26) berücksichtigt werden muss:

$$\frac{dN_2}{dt} = W_p N - \left(2W_p + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21}\right) N_2 \quad (34)$$

Der sich dadurch ergebende Faktor 2 kann leicht durch die ganze Rechnung aus a) getragen werden. Man erhält letztendlich die Schwellinversion

$$N_c = \frac{W_{cp}N}{2W_{cp} + \frac{1}{\tau_{21}} + W_{21}}, \quad (35)$$

woraus sich eine Schwellpumpleistung von

$$W_{cp} = \frac{(1 + W_{21}\tau_{21})N_c}{(N - 2N_c)\tau_{21}} = \frac{(1 + I_{21}/2I_S)N_c}{(N - 2N_c)\tau_{21}} \quad (36)$$

ergibt. Für kleine Intensitäten verhält sich die Schwellpumpleistung des Drei-Niveaulasers offenbar ähnlich. Interessant ist hier aber der Grenzfall großer Intensität, wenn $N_c \approx N/2$ wird. Anscheinend divergiert die Schwellpumpleistung für hohe Laserintensitäten, die die angeregte Atome

in Zustand 2 schnell abräumt. Dies ist auch anschaulich klar: Je schneller der Zustand 2 durch stimulierte Emission entleert wird, desto schwieriger wird es, eine Besetzungsinversion aufzubauen.

- c) Ab welchen N_c -Werten kann der Laser in den Fällen **a)** bzw. **b)** nicht mehr zum Anschwingen gebracht werden? (1 Punkt)

Aufgabe **a)** hat ergeben, dass ein Vier-Niveaulaser für alle N_c Werte anschwingt, wohingegen **b)** zeigt, dass die Schwellpumpleistung eines Drei-Niveaulasers für $N_c = N/2$ divergiert. Ein Vier-Niveaulaser kann also immer anschwingen, ein Drei-Niveaulaser nicht.